Seis Problemas de Olimpiadas

Jaime Benabent

December 21, 2018

Inducción: Sean k y n enteros positivos. Prueba que existen $m_1, m_2, \ldots, m_k$ enteros positivos tales que:

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = (1 + \frac{1}{m_1})(1 + \frac{1}{m_2}) \cdots (1 + \frac{1}{m_k})$$

Combinatoria: En una mansión de 100 habitaciones en círculo duermen 101 personas. Cada dia el dueño de la mansión selecciona una habitación en la que duerman al menos dos personas y obliga a dos personas en esta habitación a cambiarse de habitación, de tal manera que uno de ellos dormirá en la habitación de la derecha y el otro en la habitación de la izquierda. Prueba que en algún momento habrá al menos 51 habitaciones ocupadas.

Ecuaciones Funcionales: Halla todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que:

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1)$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Teoría de Números: Sea p un número primo positivo dado. Demostrar que existe un entero α tal que $\alpha(\alpha - 1) + 3$ es divisible por p si y sólo si existe un entero β tal que $\beta(\beta - 1) + 25$ es divisible por p.

Desigualdades: Determina el máximo valor posible de la expresión:

$$27abc + a\sqrt{a^2 + 2bc} + b\sqrt{b^2 + 2ca} + c\sqrt{c^2 + 2ab}$$

siendo a, b, c, números reales positivos tales que $a + b + c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Geometría: Sea ABC un triangulo con $AB = AC \neq BC$ y sea I su incentro. La recta BI corta a AC en D y la perpendicular a AC por D corta a AI en E. Prueba que el punto simétrico a I respecto de AC se encuentra en la circunferencia circunscrita al triángulo BDE.